Einführung in die theoretische Informatik I.

Erste Übung, 8. September 2022.

- $a \in \mathbb{Z}$ ist eine **Teiler** von $b \in \mathbb{Z}$ falls es gibt eine solche $c \in \mathbb{Z}$ so dass $a \cdot c = b$. Notation: $a|b$.
- a ist eine **echte Teiler** von b, falls $a|b$ und $1 < |a| < |b|$.
- $p \in \mathbb{Z}$ ist eine Primzahl, falls $|p| \geq 1$ und p hat keine echte Teilern.
- Für $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ ganze Zahlen a ist **kongruent** mit b modulo m falls a und b haben derselben Rest dividiert durch m. Notation: $a \equiv b \pmod{m}$.
- Für $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ ganze Zahlen $a \equiv b \pmod{m}$ ist genau dann Wahr, falls $m|a - b$.

---

1. Sind die folgende Aussage wahr?

a) $81 \equiv 43 \pmod{19}$

b) $4597890 \equiv -135790 \pmod{100}$

c) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$

d) $81 \cdot 10^{23} \equiv 43 \cdot 10^{23} \pmod{19}$

2. Sind die folgende Aussage wahr für alle x?

a) Falls $x \equiv 3 \ (2222)$, dann $x \equiv 3 \ (1111)$.

b) Falls $x \equiv 3 \ (2022)$, dann $x \equiv 13 \ (2012)$.

---

3. Sind die folgende Aussage wahr?

a) $111 \equiv -701 \ (7)$

b) $12345671234567 \equiv 76543217654321 \ (9)$

c) $4321^2 \equiv 1234^2 \ (5555)$

d) $110110101_{(2)} \equiv 1000101101_{(2)} \ (8)$

4. Für eine x ganze Zahl ist es wahr, dass $x \equiv 7 \ (555)$. Sind die folgende Aussage wahr?

a) $x + 10 \equiv 17 \ (555)$

b) $3x \equiv 21 \ (555)$

c) $3x \equiv 21 \ (1665)$

d) $x^2 \equiv 49 \ (555)$

e) $2^x \equiv 2^7 \ (555)$

f) $x^{100} \equiv 7^{100} \ (555)$

5. Für welche positive ganze m Zahlen sind die folgende Aussage wahr?

a) $149 \equiv 139 \ (m)$

b) $2022 \equiv 2023 \ (m)$

6. Wie viele solche ganze Zahlen gibt es zwischen 1 und 1000, die hat ebenso viele gerade und ungerade Teiler?

7. Beweisen Sie dass falls für eine $n \geq 1$ ganze Zahl $2^n - 1$ Primzahl ist, dann n ist auch eine Primzahl.

---

8. Sind die folgende Aussage wahr?

a) $22^{23} + 24 \equiv 25 \pmod{11^{12}}$

b) $64 \cdot 2022^{2022} \equiv 157 \cdot 2022^{2022} \pmod{31}$

9. Für welche m ganze Zahlen sind die folgende Aussage wahr?

a) $m + 13 \equiv m + 18 \ (m)$

b) $7m + 9 \equiv m^2 + 9 \ (m)$

c) $13 \equiv 613 \ (m)$ und $23 \equiv 617 \ (m)$

d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \ (m)$

10. Entscheiden Sie ob die folgende Aussagen wahr sind oder nicht für alle ganze Zahl n! (Klausur, 19. Dezember 2014)

a) Falls $n^2 \equiv 1 \ (39)$, dann $n \equiv 1 \ (39)$ oder $n \equiv -1 \ (39)$.

b) Falls $n^2 \equiv 1 \ (39)$, dann $n \equiv 1 \ (13)$ oder $n \equiv -1 \ (13)$.

11. Für welche ganze p Primzahlen ist $p + 10$ und $p + 14$ auch Primzahlen?

12. a) Wie viele positive Teilern hat 8800?

b) Wie viele gemeinsame positive Teilern haben 8800 und 99000?

13. Beweisen Sie dass falls für eine $n \geq 1$ ganze Zahl $2^n + 1$ eine Primzahl ist, dann n ist eine 2-er Potenz.

14. Welche Primzahlen können sind im Form $n^4 + 4$ ausdruckbar?