Einführung in die theoretische Informatik I.
Zehnte Übung, 17. November 2022.

1. Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie die folgende Operationen falls möglich!
a) $2A + 3B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$
d) $A \cdot B + 2B$ e)$B \cdot B^T$

2. Berechnen sie die folgende Determinant mit der Hilfe von der Entwicklungssatz!

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & \pi \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

---

3. Eine Matrix der Größe 2×3 hat keine negative Elemente. Die oben linkst Element von $A \cdot A^T$ ist 0, die unten rechtest Element ist 14. Die oben linkst Element von $A^T \cdot A$ ist 4, diu untent rechtest Element ist 9. Bestimmen Sie die Matrizan A, $A \cdot A^T$ und $A^T \cdot A$! (Klausur, 16. Dezember 2019)

4. Multiplizieren wir alle Elemente von dem Matrix A der Größe $n \times n$ mit der Wert der dazugehörenden Unterdeterminanten (mit Vorzeichen)! Was wird die Summe der so bekommenden n^2 Produkte sein?

5. Entscheiden Sie, ob die folgende Gleichungen für beliebige Matrizen A und B, beide der Größe $n \times n$ gelten! (E ist die Einheitsmatrix der Größe $n \times n$)
a) $AB + B = (A + E)B$ b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ c) $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E$

6. Berechnen Sie die folgende Matrizen!
a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2020}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2021}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$

---

7. In den Matrizen A und B der Größe 4×4 ist der j-te Element in der i-te Zeile a_{ij} und b_{ij}. Wir wissen, dass für alle $1 \le i, j \le 4$

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{falls } j = 1, 2 \\ 9 - i - j, & \text{falls } j = 3, 4 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_{ij} = \begin{cases} j, & \text{falls } i = 1, 3 \\ 1 - j, & \text{falls } i = 2, 4 \end{cases}$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und det $(B \cdot A)$!

8. Lösen Sie die $A \cdot X = B$ Matrixgleichung!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 13 & 10 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 16 & 0 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Berechnen sie die folgende Determinant! (Klausur, 11. Dezember 2017)

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$$

10. Berechnen Sie die folgende Matrizen und ihre Determimanten!(Klausur, 21. Oktober 2008; 2. Dezember 2008)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{2008} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 16 & -7 \end{pmatrix}^{2008}$$

11. Berechnen Sie alle solche Y Matrizen, dafür $Y \cdot A = B$ wahr ist! (Klausur, 21. Oktober 2018)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 11 \\ -3 & -7 & 12 & -11 \\ 5 & 7 & -18 & 22 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 & -13 \end{pmatrix}$$

12. Alle Elemente der Matrix A sind 0, 1 oder -1. Die Anzahl der Elemente, die ungleich 0 sind ist 2016. Berechnen Sie die Summe der Elemente der Hauptdiagonale der Matrix $A^T \cdot A$!

13. Entscheiden Sie ob die folgende Aussagen wahr sind für alle Matrizen der Größe $n \times n$
a) Falls es gibt eine solche $k \ge 1$ ganze Zahl, dafür $A^k = E$, dann det $A = 1$ oder det $A = -1$.
b) Falls det $A = 1$ oder det $A = -1$, dann es gibt eine solche $k \ge 1$ ganze Zahl, dafür $A^k = E$.

14. Beweisen Sie, dass alle Zeilen einer beliebigen Matrix A der Größe $n \times n$, $det(A) \neq 0$ enthalten einen solchen Element, den wir so ändern können, dass der Determinant 0 wird.

15. Für die Matrix A der Größe $n \times n$ gilt, dass falls wir die Werte im Hauptdiagonale von A um 1 inkrementieren, dann wird det $A = 0$ sein. Beweisen Sie, dass falls wir die Werte im Hauptdiagonale von A^3 um 1 inkrementieren, dann wird det $A^3 = 0$ sein.