Einführung in die theoretische Informatik I.
Elfte Übung, 24. November 2022.

1. Berechnen Sie die Invers der folgenden Matrix falls es existiert: (Klausur, 3. Dezember 2012.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

---

3. Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen, falls es möglich ist!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (Klausur, 24 November 2011.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$

4. Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

5. Sei A ein Matrix der Größe $n \times n$, und seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebige Spaltenvektoren. Beweisen Sie, dass falls $x \neq y$ und $Ax = Ay$, dann $det(A) = 0$.

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie an eine solche B Matrix, dafür $A \cdot B$ ist die Einheitsmatrix der Größe 2×2. (Klausur, 11. Dezember 2017)

b) Entscheiden Sie ob eine solche B Matrix existiert, dafür $B \cdot A$ ist die Einheitsmatrix der Größe 3×3. (Klausur, 18. Dezember 2017)

---

7. Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen, falls es möglich ist!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (Klausur, 11 Dezember 2012.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

8. Sei $A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$. Wir wissen, dass $A^3 = E$. Berechnen Sie $det(A)$ und die unten rechteste Element von A^{-1}! (Klausur, 6. Dezember 2019)

9. Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen für alle Werte von p! (Klausur, 19 Dezember 2014., 2. Dezember 2021.)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 8 & -2 \\ 3 & 13 & -9 & p \\ 2 & 14 & 10 & p-13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -20 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$

10. Nehmen wir an, dass alle Zeilen der Matrix A arithmetische Folgen sind. Beweisen Sie, dass $r(A) \leq 2$! (Klausur, 26. Oktober 2006)

11. Seien A und B Matrizen der Größe 3×3 und $r(A) = 2, r(B) = 2$. Entscheiden Sie ob die folgende Aussagen für alle A, B *wahr* oder*falsch* sind, oder sie können *falsch und wahr auch* sein.

a) $r(A^3) = 3$ b) $r(B^3) = 3$ c) $r(B^3) = 2$

12. Nennen wir ein Matrix A der Größe $n \times n$ ein *Nullteiler*, wenn es ein solcher Matrix $B \neq 0$ (der Größe $n \times n$) existiert, wofür $A \cdot B = 0$ (0 ist der Nullmatrix hier.) Sind die folgende Aussagen wahr?

a) Wenn A Nullteiler ist, dann $det(A) = 0$ b) Wenn $det(A) = 0$, dann A ist Nullteiler.

13. Für eine Matrix A der Größe 6×6 $r(A) = 4$. Beweisen Sie, dass es solche Matrizen (B und C) existieren, wofür $r(B) = r(C) = 2$ und $A = B + C$ (Klausur, 27. November 2014)

14. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen für beliebige A und B Matrizen gelten (angenommen, daß die Operationen ausgeführt werden können).

a) $r(A \cdot B) \leq r(A)$

b) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$