Einführung in die theoretische Informatik I.
Zwölfte Übung, 1. Dezember 2022.

1. Sind die folgende $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Funktionen lineare Abbildungen? Falls ja, schreiben Sie die Matrix $[f]$ der Abbildung auf. Bestimmen Sie auch Imf und $Kerf$ und ihre Dimension.
a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f:(x,y,z) \mapsto (x-y+z, x-y+z)$;
b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f Spiegelt alle Vektoren an der y-Achse;
c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f$ ordnet zu alle $\underline{v}$ Vektoren den Vektor, der an der x Achse liegt, und deren erste Koordinate die größere aus den zwei Koordinaten von $\underline{v}$ ist.

---

2. Sind die folgende $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Funktionen lineare Abbildungen? Falls ja, schreiben Sie die Matrix $[f]$ der Abbildung auf. Bestimmen Sie auch Imf und $Kerf$ und ihre Dimension.
a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ ist die letzte Koordinate von $f(\underline{v})$ die Summe der Koordinaten von $\underline{v}$, und die andere Koordinaten sind gleich mit den entsprechenden Koordinaten von $\underline{v}$;
b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f:(x,y,z) \mapsto (|x|,|y|,|z|)$.

3. Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ ordnet den Vektor $(14,16,14)$ zu den Vektor $(2,6)$ und $(1,-10,-5)$ zu $(1,-3)$.
a) Schreiben Sie den $[f]$ Matrix von f auf.
b) Was für ein Vektor wird f zu $(4,6)$ ordnen?
c) Für welche Wert von p gilt die folgende: $(10,-9,p) \in Imf$?

4. Über die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ wissen wir, dass die folgende Bedingungen dafür gelten:
- Der Bild von 7 beliebige Vektoren ist linear abhängig
- Unter 8 linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ gibt es ein, dessen Bild nicht $\underline{0}$ ist.

Beweisen Sie, dass $n \leq 13$

---

5. Sind die folgende $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Funktionen lineare Abbildungen? Falls ja, schreiben Sie die Matrix $[f]$ der Abbildung auf. Bestimmen Sie auch Imf und $Kerf$ und ihre Dimension.
a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f ordnet zu alle $\underline{v}$ einen solchen Vektor, der an der x-Achse liegt und dessen erste Koordinate gleich mit der Summe der Koordinaten von $\underline{v}$ ist;
b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f:(x,y,z) \mapsto (3x-5y+7z, -4x+2y-6z, x+3y-z)$;
c) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, f ordnet zu alle $\underline{v}$ einen solchen $f(\underline{v})$ Vektor, deren i-ten Koordinate ist gleich mit der Summe der erste i Koordinaten von $\underline{v}$.

6. Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ordnet den Vektor $(5,6)$ sowohl zu $(1,2)$, als auch zu $(3,4)$ zu.
a) Schreiben Sie $[f]$ auf!
b) Berechnen Sie, was zu $(99,100)$ zugeordnet wird!
c) Ist $(55,55) \in Imf$ wahr?
d) Ist $(55,55) \in Kerf$ wahr?

Die Matrix der linearen Abbildung $f:\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ ist rechts zu sehen.
7. Berechnen Sie $dimImf$ und $dimKerf$ und geben Sie je eine Basis in Imf und $Kerf$ an!

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

8. Sei $f:\mathbb{R}^{20} \mapsto \mathbb{R}^{10}$ eine lineare Abbildung, $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,...,\underline{b}_{20}\}$ ein Basis in $\mathbb{R}^{20}$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}, \underline{v} \neq \underline{0}$ ein Vektor. Bestimmen Sie $Kerf$, wenn wir wissen, dass zu alle Vektoren aus $\underline{b}_1,\underline{b}_2,...,\underline{b}_{20}$ der Vektor $\underline{v}$ zugeordnet wird. (Klausur, 27. November 2014)

9. Sei $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $A=[f]$. Sind die folgende Aussage wahr?
a) Wenn $Kerf$ beinhaltet eine nicht Null Vektor, dann $detA=0$.
b) Falls $detA=0$, dann $Kerf$ beinhaltet eine nicht Null Vektor.
c) Wenn $Imf \subseteq Kerf$, dann $A^2=0$.
d) Wenn $A^2=0$, dann $Imf \subseteq Kerf$.

10. Sei $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...\underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Welche von den folgenden sind wahr?
a) Wenn $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...\underline{v}_k$ ein Generatorsystem in $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $f(\underline{v}_1),f(\underline{v}_2),...f(\underline{v}_k)$ auch ein Generatorsystem in $\mathbb{R}^m$.
b) Wenn $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...\underline{v}_k$ ein Generatorsystem in $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $f(\underline{v}_1),f(\underline{v}_2),...f(\underline{v}_k)$ auch ein Generatorsystem in Imf.
c) Wenn $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...\underline{v}_k$ ein linear unabhängiger System ist, dann $f(\underline{v}_1),f(\underline{v}_2),...f(\underline{v}_k)$ auch.
d) Wenn $f(\underline{v}_1),f(\underline{v}_2),...f(\underline{v}_k)$ ein linear unabhängiger System ist, dann $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...\underline{v}_k$ auch.

11. Beweisen Sie, dass falls für die Matrizen A und B der Größe $n \times n$ die Gleichung $A \cdot B = 0$ gilt, dann $r(A)+r(B) \leq n$.