Einführung in die theoretische Informatik I.
Dreizehnte Übung, 5. Dezember 2022

1. Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ordnet den Vektor $(2;5)$ zu $\underline{b}_1=(2;3)$, und den Vektor $(2;1)$ zu $\underline{b}_2=(0;2)$

a) Bestimmen Sie der Matrix $[f]_B$ nach der Basis B!
b) Bestimmen Sie α und β, falls f ordnet den Vektor $3\underline{b}_1+\beta\underline{b}_2$ zu den Vektor $\alpha\underline{b}_1+\underline{b}_2$!
c) Bestimmen Sie der Matrix $[f]$!
d) Bestimmen Sie $f((4;6))$

2. a) Sind die Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$ und $\underline{w}$ Eigenvektoren von A?
b) Suchen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie die dazu gehörende Eigenvektoren an!

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\4&4&3\\2&2&0\end{pmatrix},\quad \underline{u}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\quad \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \underline{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

---

3. Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ordnet den Vektor $(8;1)$ sowohl zu $\underline{b}_1=(0;1)$, als auch zu $\underline{b}_2=(4;1)$ zu. Bestimmen Sie $[f]_B$ und $[f]$, falls $B=\underline{b}_1,\underline{b}_2$

4. Über die Vektor $\underline{v}$ und die Matrix A wissen wir, dass $\underline{v}$ eine Eigenvektor von A ist. Berechnen Sie p und geben Sie einen Eigenwert von A an! (Klausur, 15. Dezember 2010)

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\8&2&-1\\p&5&1\end{pmatrix}$$

5. Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ eine linear Transformation und $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}$ ein Basis in $\mathbb{R}^3$. Der Matrix von f nach der Basis B ist rechts zu sehen. Bestimmen Sie $\underline{b}_2$, falls $f(\underline{b}_1+\underline{b}_3)=(10;20;30)$. (Klausur, 15. Dezember 2014)

$$[f]_B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&10&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$$

6. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ folgenderweise definiert: $f:(x,y)\mapsto(2x+y,3x+4y)$.

a) Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $[f]$ an!
b) Geben Sie in $\mathbb{R}^2$ eine Basis an, die aus die Eigenvektoren von $[f]$ besteht und schreiben Sie $[f]_B$ in dieser Basis an!

7. Sei der vierte Element (von oben) in der vierten Spalte der Matrix A der Größe 5×5 gleich 7 und seien alle andere Elemente dieser Spalte 0. (Die andere Elemente sind unbekannt.)

a) Beweisen Sie, dass $\lambda=7$ ein Eigenwert von A ist.
b) Geben Sie eine Eigenvektor von A an!

---

8. Für $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ und der Basis $B=\underline{b}_1=(1;0;0),\underline{b}_2=(2;1;0),\underline{b}_3=(2;2;1)$ gilt dass $f(\underline{b}_1)=\underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2)=\underline{b}_3$ und $f(\underline{b}_3)=\underline{b}_1$. Bestimmen Sie $[f]_B$ und $[f]$! (Klausur, 27. November 2014)

9. Ist 3 eine Eigenwert von A? Falls ja, geben Sie an eine Eigenvektor von A gehörend zu 3! (Klausur, 27. November 2014)

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\2&4&5\\1&8&4\end{pmatrix}$$

10. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ eine linear Transformation. $[f]_B$ in der Basis $B=\underline{b}_1,\underline{b}_2$ ist rechts zu sehen. Berechnen Sie p und q falls $f(\underline{b}_1)=\underline{b}_2$!

$$[f]_B=\begin{pmatrix}p&\sqrt{2}\\q&\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

11. Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ folgenderweise definiert: $f:(x,y,z)\mapsto(0,3x+4y+z,6x+2y+5z)$

a) Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $[f]$ an!
b) Gibt es ein solcher Basis B in $\mathbb{R}^3$, wofür $[f]_B$ diagonal ist? (Außer der Hauptdiagonale sind alle Elemente von $[f]_B$ 0-s.) Falls ja, geben Sie dieser B an, und schreiben Sie $[f]_B$ bezüglich dieser Basis auf!

12. Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ eine linear Transformation und $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}$ ein Basis in $\mathbb{R}^3$. Der Matrix von f nach der Basis B ist rechts zu sehen. Für welche Werte von p gilt, dass $5\underline{b}_1-\underline{b}_2+p\cdot\underline{b}_3\in Kerf$?

$$[f]_B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&10&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$$

13. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ eine linear Transformation. $[f]_B$ in der Basis $B=\underline{b}_1=(1;0),\underline{b}_2=(1;1)$ ist rechts zu sehen. Wir wissen, dass es existiert y so dass $f((y;3)=(y;3)$. Berechnen Sie x!

$$[f]_B=\begin{pmatrix}3&1\\x&4\end{pmatrix}$$

14. Seien $\underline{u}$ und $\underline{v}$ zwei Eigenvektoren von der Matrix A (der Größe $n\times n$), die zu verschiedene Eigenwerte gehören. Kann es vorkommen, dass $\underline{u}+\underline{v}$ ein Eigenvektor von A oder von A^2 ist. (Klausur, 9. Dezember 2013; 17. Dezember 2013)