Einführung in die theoretische Informatik I.
Sechste Übung, 13. Oktober 2022.

1. Entscheiden Sie ob die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ eine Unterraum bilden.

a) V besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^4$, deren Koordinaten zwischen 0 und 1 sind.

b) W besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^4$, deren ersten Koordinate gleich ist mit der vierte.

2. Gegeben seien in $\mathbb{R}^4$ die folgende Vektoren:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix}2\\20\\202\\2022\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie welche Unterräumen die folgende Vektorsystem bilden, und entscheiden Sie ob die Vektorsystemen linear unabhängig sind!

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$, b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$, c) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}, \underline{d}$

---

3. Entscheiden Sie ob die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^6$ eine Unterraum bilden.

a) V besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^6$, deren Koordinaten von oben in wechselnde Reihenfolge stehen.

b) W besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^6$, wobei die Summer der obige drei Koordinaten ist gleich mit der Summe der unteren drei Koordinaten.

4. Gegeben seien in der $\mathbb{R}^3$ Raum die folgende Vektoren:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix}7\\6\\-5\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie welche Unterräumen die folgende Vektorsystem bilden, und entscheiden Sie ob die Vektorsystemen linear unabhängig sind!

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}$, c) $\underline{u}, \underline{a}$, d) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$, e) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}$

5. Die Vektorsystem $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ist linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$. Ist die Vektorsystem $2\underline{a}, \underline{a}+\underline{b}, \underline{a}+\underline{c}$ auch linear unabhängig? (Klausur, 14. Dezember 2020)

6. Wir wissen über $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_n$ dass $\underline{v}_1$ ist in der Unterraum generiert bei der andere $n-1$ Vektoren, und keine andere Vektor ist in der Unterraum generiert bei der andere $n-1$ Vektoren. Beweisen Sie dass $\underline{v}_1 = \underline{0}$.

---

7. Entscheiden Sie ob die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ eine Unterraum bilden.

a) V besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^4$, deren Koordinaten von oben eine arithmetische Folge bilden. (Klausur, 14. Dezember 2020)

b) V besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^4$, deren Koordinaten von oben eine geometrische Folge bilden. (Klausur, 10. Dezember 2020)

8. Bestimmen Sie die Unterraum generiert bei der folgende Vektorsysteme. Falls die Unterraum eine Gerade oder Ebene ist, geben Sie die ihre Gleichung oder Gleichungssystem an!

a) $(1,0,4);(0,1,-1)$, b) $(2,-5,1);(-6,15,-3)$, c) $(3,1,-4);(4,2,-3)$,
d) $(3,1,-4);(4,2,-3),(5,3,-2)$

9. Für welche Werten der p Parameter sind die folgende Vektoren von $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig? Bestimmen sie die Unterraum generiert bei der Vektoren falls $p=-4$. (Klausur, 30. Oktober 2020)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\p\end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\p\\8\end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\p\end{pmatrix}$$

10. Seien $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ beliebige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und seisen $\underline{u} = \underline{a}+\underline{b}, \underline{v} = \underline{b}-\underline{c}$ und $\underline{w} = \underline{c}+2\underline{a}$. Sind die folgende Aussage wahr?

a) Falls $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ linear unabhängig sind, dann $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sind auch linear unabhängig.

b) Falls $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ linear unabhängig sind, dann $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind auch linear unabhängig.