Einführung in die theoretische Informatik I.
Siebente Übung, 20. Oktober 2022.

1. Seien $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}, \underline{c}$ und $\underline{d}$ die Vektoren von Aufgabe 2 der sechste Übung.

a) Bildet die Vektorsystem $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ ein Basis im $\mathbb{R}^4$?

b) Bildet die Vektorsystem $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$ ein Basis im $\mathbb{R}^4$? Falls ja, was sind die Koordinaten von $\underline{a}$ nach dieser Basis?

c) Bildet die Vektorsystem $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{d}$ ein Basis im $\mathbb{R}^4$? Falls ja, was sind die Koordinaten von $\underline{d}$ nach dieser Basis?

2. Bestimmen Sie die Dimensionen von den folgenden Unterräume und bestimmen Sie je eine solche Basis die eine solche Vektor enthält deren jede Koordinate 1 ist!

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}$ b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$

---

3. Seien im $\mathbb{R}^3$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, und $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2022 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie ob die folgende Vektorsystemen eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden, und falls ja, bestimmen sie die Koordinaten der vierten Vektor nach der Basis!

a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$

4. Geben Sie in den folgenden Unterräumen eine solche Basis an, die $\underline{v}$ enthält und bestimmen Sie die Dimension des Unterräumes!

a) V besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^4$, wobei die Summe der zwei obigen Koordinaten gleich mit der Summe der zwei unteren Koordinaten ist. $\underline{v} = (1, 1, 1, 1)$

b) W besteht aus solchen Vektoren von $\mathbb{R}^{100}$, deren Koordinaten bilden eine geometrische Folge von oben nach unten mit der Quotient 2. Die erste Koordinate von $\underline{v}$ ist 7.

5. Seien $\underline{u}, \underline{v}$ und $\underline{w}$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Für welche Werte von p gilt, dass die Vektoren $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ auch linear unabhängig sind?

---

6. Geben Sie eine Basis in $\mathbb{R}^4$ an, die $\underline{u}, \underline{v}$ und $\underline{w}$ enthält und schreiben Sie $\underline{a}$ nach dieser Basis an! $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. Für welche Werten von p ist $\underline{v} \in \langle \underline{b_1}, \underline{b_2} \rangle$ wahr? Bestimmen Sie für diese Wert von p die Vektor $[\underline{v}]_B$! $\underline{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}$

8. Nehmen wir an, daß die Vektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_k$ in $V \leq \mathbb{R}^n$ eine Basis bilden. Für welche Werten von p ist es wahr, dass die Vektoren $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \cdots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - p \cdot \underline{v}_1$ auch eine Basis in V bilden?

9. Bestimmen Sie die Dimension der Unterraum generiert von den Vektoren definiert im Aufgabe **7.** von der sechste Übung (die vier elemenitige arithmetische Folgen)!

10. Wir wissen, dass $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ eine Basis in $\mathbb{R}^4$ bilden. Bestimmen Sie die Dimension der Unterraum generiert von den Vektoren $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{c} + \underline{d}$, $\underline{a} + \underline{c}$ und $\underline{b} + \underline{d}$! (Klausur, 30. Oktober 2017)

11. Für die Unterraum $V \leq \mathbb{R}^n$ ist $dim V = k$ und die Vektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_k$ bilden einen Generatorsystem in V. Ist es wahr, dass sie auch einen Basis bilden?

12. Kann man

a) in $\mathbb{R}^4$ vier solche Vektoren angeben, dass beliebig zwei von sie linear unabhängig sind, aber beliebig drei von sie nicht mehr? (Klausur, 20. Oktober 2014)

b) in $\mathbb{R}^5$ fünf solche Vektoren angeben, dass beliebig drei Vektoren von sie linear unabhängig sind, aber beliebig vier von sie nicht mehr? (Klausur, 15. Dezember 2014)

c) in $\mathbb{R}^4$ sechs solche Vektoren angeben, dass beliebig 5 von sie eine Generatorsystem in $\mathbb{R}^4$ bildet, aber beliebig 4 von sie nicht mehr? (Klausur, 19. Dezember 2014)

13. Nehmen wir zwei Unterräume (V, W) von $\mathbb{R}^{99}$ so, daß $dim V = dim W = 50$. Beweisen Sie, dass diese zwei Unterräume mindestens ein, von $\underline{0}$ unterschiedliches gemeinsames Element haben.