Einführung in die theoretische Informatik I.
Achte Übung, 26. Oktober 2022.

1. Lösen Sie die folgende Gleichungssysteme unter Verwendung des Gauss-Verfahrens!

a) $$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2\\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1\\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34\\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= 21 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2\\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1\\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34\\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= p \end{aligned}$$

---

2. Lösen Sie die folgende Gleichungssystem! (Klausur, 22. Novemer 2005)

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 14\\ 2x_1+6x_2+10x_3+6x_4+2x_5 &= 28\\ x_1+5x_2+9x_3+2x_4+3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

3. Für welche Werte von p ist die folgende Gleichungssystem lösbar? Falls es gibt mindestens eine Lösung, geben Sie an alle Lösungen! (Klausur, 20. Oktober 2014)

$$\begin{aligned} x_1-x_2+4x_4 &= -2\\ 2x_1-2x_2+x_3+8x_4 &= -3\\ x_1+x_2+6x_3+8x_4 &= 2\\ 3x_1-3x_2+p\cdot x_3+(p^2+p+12)\cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

4. Bilden die folgende Vektorsysteme einen Basis in R^4? Falls ja, geben Sie die Koordinaten von $\underline{v}$ nach dieser Basis an!

a) $$\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\23\\0\\17\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-9\\11\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\12\\-2\\7\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}\qquad \underline{v}=\begin{pmatrix}3\\5\\8\\9\end{pmatrix}$$

---

5. Geben Sie alle Schnittpunkte der Ebenen S_1, S_2 und S_3 an! (Klausur, 31. Oktober 2001; 20. Dezember 2004)

a) $$\begin{aligned} S_1:&\quad x+y+z &= 6\\ S_2:&\quad 2x+3y-2z &= 0\\ S_3:&\quad 5x+7y-3z &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} S_1:&\quad 2x-y+5z &= 3\\ S_2:&\quad 3x+2y+6z &= 4\\ S_3:&\quad 4x-9y+13z &= 9 \end{aligned}$$

6. Für welche reelle Werte des Parameters p werden die folgende Gleichungssysteme mindestens eine Lösung haben? Geben Sie auch die Lösungen an! (Klausur, 14. Dezember 2004; 19. Dezember 2014)

a) $$\begin{aligned} -x+3y-z+3w &= -2\\ 2x-6y+5z+12w &= 7\\ 3x-9y+5z+pw &= 9 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+5x_2-x_3+4x_4 &= 2\\ x_1+8x_2+8x_3-2x_4 &= 14\\ 3x_1+13x_2-9x_3+p\cdot x_4 &= -2\\ 2x_1+14x_2+10x_3+(p-13)\cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

7. Bilden die Vektoren $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$? Falls ja, geben Sie die Koordinaten von $\underline{a}$ nach dieser Basis an!

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}10\\23\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}4\\12\\-2\end{pmatrix},\ \text{und } \underline{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\34\end{pmatrix}$$

8. Für welche Werte von p bildet der Vektorsystem $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4\}$ einen Basis in R^4? Geben Sie die Koordinaten von $\underline{v}_B$ für diese Werte von p an!

$$\underline{b}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\11\\13\end{pmatrix},\ \underline{b}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\15\\12\end{pmatrix},\ \underline{b}_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-19\\4\\19\end{pmatrix},\ \underline{b}_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\-5\\p\end{pmatrix},\ \text{und } \underline{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-5\\-48\\-19+3p\end{pmatrix}$$

9. Lösen Sie die folgende, aus n Gleichungen und n Unbekannten bestehenden Gleichungssysteme!

a) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n &= n\\ x_1+2x_2+2x_3+\cdots+2x_n &= n-1\\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+3x_n &= n-2\\ &\ \vdots\\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 1\\ x_2+x_3 &= 1\\ &\ \vdots\\ x_{n-1}+x_n &= 1\\ x_n+x_1 &= 1 \end{aligned}$$

10. Nehmen wir an, dass wir eine lineare Gleichungssystem haben, worüber wir wissen, dass es lösbar ist und die Lösung eindeutig ist. Falls wir die Zahlen am rechten Seite verändern, wäre es möglich, dass die Gleichungssystem

a) keine Lösungen haben wird?

b) unendlich viele Lösungen haben wird?