Einführung in die theoretische Informatik I.
Neunte Übung, 10. November 2022.

1. Berechnen Sie die folgende Determinant mit der Definition! (Klausur, 6. Dezember 2019)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Berechnen Sie die folgende Determinant! (Klausur, 6. Dezember 2019)

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

---

3. Berechnen Sie die folgende Determinanten!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 \end{vmatrix}$$

4. Berechnen Sie die folgende Determinanten mit der Definition!

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Im Matrix A der Größe 4×4 ist der j-te Element in der i-te Zeile a_{ij}. Berechnen Sie $det(A)$, falls:

a) $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ c) $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$

Lösen Sie die Aufgabe auch für Matrizen der Größe 99×99!

6. Ein Matrix der Größe $n \times n$ enthält nur 1 und -1. Beweisen Sie, dass die Determinante dieser Matrix durch 2^{n-1} teilbar ist.

---

7. Wir berechnen die Determinant von Matrix A nach der definition.

a) Wie viele nicht 0 Produkten werden wir bekommen?

b) Was ist die Vorzeiche von der Produkt der beinhaltet 23?

$$\begin{vmatrix} 0 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 22 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{vmatrix}$$

8. Im Matrix A der Größe $n \times n$ ist der j-te Element in der i-te Zeile a_{ij}. Berechnen Sie $det(A)$, falls:

a) $a_{ij} = i \times j$ b) $a_{ij} = min\{i, j\}$ c) $a_{ij} = 2^i + 5j + 3$

9. Wie verändert sich der Wert der Determinante einer Matrix der Größe 10×10, falls wir die folgende Operation durchführen?

a) Wir multiplizieren alle Elemente der Matrix mit 2.

b) Wir addieren die Differenz der dritten und der siebenten Zeile zu diese zwei Zeilen.

c) Für alle $1 \leq i, j \leq 10$ multiplizieren wir das j-te Element der i-ten Zeile mit i/j

10. Berechnen Sie $det(A) + det(B)$! (Klausur, 20. Oktober 2011)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{vmatrix}$$

11. Berechnen Sie $det(B)$, falls $det(A) = 45653$ wahr ist! (Klausur, 19. Dezember 2014)

$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

12. Im Matrix A der Größe 101×101 ist der j-te Element in der i-te Zeile a_{ij}.

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{die } (2i+j)\text{-te Ziffer von } 3^{2004}, & \text{falls } i \cdot j \text{ gerade ist,} \\ 0, & \text{falls } i \cdot j \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $det(A)$! (Klausur, 4. November 2004)

13.

14.

15. Beweisen Sie, dass $det(a) \neq 0$ ist! $A = \begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix}$