

1. a) 7 Mädchen (A, B, ..., G) und 6 Jungen (1, 2, ..., 6) möchten sich heiraten. Die Tabelle zeigt, wer bereit ist mit wem zu heiraten. Ist es möglich eine Frau für alle Jungen zu finden?
 b) G und 5 haben entschieden, dass ab jetzt sie einander hassen. Ist es so möglich eine Frau für alle Jungen zu finden? (Klausur, 9. Mai 2011)

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

2. Sei der Graph G ein einfacher zusammenhängender bipartiter Graph. Beide Knotenklassen enthalten n Knoten, und in einer der Knotenklassen ist der Grad aller Knoten unterschiedlich. Beweisen Sie, dass G eine vollständige Paarung enthält.

3. Sei $G(A, B; E)$ einer bipartiter Graph mit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ und $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. a_i und b_j seien Nachbarn falls der Element in dem i -ten Zeile und j -ten Spalte der rechts angezeichnete Matrix ist 1. Geben Sie eine maximale Paarung und eine maximale unabhängige Knotenmenge in G an! (Klausur, 23. April 2015)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Die Veranstalter einer 10 Tage lang Urlaub bietet für alle Tagen genau 5 verschiedene Programmmöglichkeiten aus 16 an. Derselbe Programm ist niemals angeboten an 2 aufeinanderfolgenden Tagen. Beweisen Sie dass es ist möglich für jede Tage verschiedene Programme zu wählen! (Klausur, 18. Mai 2010)
5. In einem Baum mit 11 Knoten ist der maximale Gradzahl 3. Beweisen Sie, dass der Baum eine Paarung mit 4 Kanten enthält! (Klausur, 23. April 2015)
6. In dem bipartiten Graphen G mit 20 Knoten sind die Grade von 18 Knoten 5, und von den Rest 3. Bestimmen Sie $\nu(G)$!
7. (*) Auf einem 100×100 große Schachbrett wählen wir 30 Felder so dass die Felder eine zusammenhängende Bereich bilden (jede gewählte Feld ist erreichbar von alle andere gewählte Felder so dass wir benutzen nur horizontale oder vertikale Schritten von Länge 1). Beweisen Sie dass es möglich ist, 8 Stück Domino ohne Überlappung zu legen an der gewählte Felder. (Klausur, 30. April 2021)

8. Sei $G(A, B; E)$ einer bipartiter Graph mit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ und $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. a_i und b_j seien Nachbarn falls der Element in dem i -ten Zeile und j -ten Spalte der rechts angezeichnete Matrix ist 1. Geben Sie eine maximale Paarung und eine maximale unabhängige Knotenmenge in G an! (Klausur, 27. Oktober 2014)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 9.
10. An einem Ball nehmen 25 Jungen und 25 Mädchen teil. Jedes Mädchen kennt mindestens 13 Jungen, und jeder Junge kennt mindestens 13 Mädchen. Beweisen Sie, dass sie so in Paaren tanzen können, dass jede mit einem Bekannten tanzt.
11. Beide Knotenklassen eines einfachen bipartiten Graphen enthalten genau 5 Knoten und der Gradzahl von alle Knoten ist mindestens 2. Ist es wahr, dass der Graph eine vollständige Paarung enthält? (Klausur, 6. Mai 2010)
12. In einem bipartiten Graphen mit 19 Knoten ist der Grad von 17 Knoten 6, und von den Rest 3. Beweisen Sie, dass der Graph eine Paarung mit 9 Kanten enthält.
13. Auf einem Schachbrett sind 32 Figuren so gestellt, dass in jede Spalte und Zeile es 4 Figuren gibt. Beweisen Sie dass es möglich ist 8 Figuren so auswählen, dass jede Zeile und Spalte pünktlich 1 aus diese enthält.

- $\nu(G)$ ist die Anzahl von Kanten in eine maximale unabhängige Kantenmenge.
 - $\tau(G)$ ist die Anzahl von Knoten in eine minimale überdeckende Knotenmenge.
 - $\alpha(G)$ ist die Anzahl von Knoten in eine maximale unabhängige Knotenmenge.
 - $\rho(G)$ ist die Anzahl von Kanten in eine minimale überdeckende Kantenmenge.
- Für alle G Graphen $\nu(G) \leq \tau(G)$.
 - Für alle G Graphen $\alpha(G) \leq \rho(G)$, falls G beinhaltet keine isolierte Knoten.
 - **Gallai I.**
Für alle G Graphen mit n Knoten $\alpha(G) + \tau(G) = n$.
 - **Gallai II.**
Für alle G Graphen mit n Knoten $\nu(G) + \rho(G) = n$, falls G beinhaltet keine isolierte Knoten.
 - **König**
Für alle G bipartite Graphen $\nu(G) = \tau(G)$.
 - Falls eine G bipartite Graph beinhaltet keine isolierte Knote, dann $\alpha(G) = \rho(G)$.
 - **Hall**
Für eine $G = (A, B; E)$ bipartite Graph genau dann existiert eine Paarung das bedeckt A , falls für alle $X \subseteq A$ Teilmenge $|N(X)| \geq |X|$ wahr ist.
 - **Frobenius**
Für eine $G = (A, B; E)$ bipartite Graph genau dann existiert eine vollständige Paarung, falls $|A| = |B|$ und für alle $X \subseteq A$ Teilmenge $|N(X)| \geq |X|$ wahr ist.